588. D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2006). Che problema i problemi! *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 6, vol. 29 A-B. 645-664. Editore: Centro Morin, Paderno del Grappa (TV). ISSN: 1123-7570.

Che problema i problemi

Bruno D’Amore **Martha Isabel Fandiño Pinilla**

NRD Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

Nota: La relazione tenuta al mattino da Bruno D’Amore ed il laboratorio condotto da Martha Isabel Fandiño Pinilla convergono in quest’unico testo, dato che l’attività del pomeriggio era un’estensione su campo di quanto proposto al mattino.

Sunto. Si suggeriscono alcune riflessioni attorno al tema problem solving, e più precisamente sulla differenza tra problema ed esercizio, il problem posing, la motivazione e l’intuizione.

Summary. We suggest some reflections regarding the topic of problem solving, and more precisely on the difference between problem and exercise, problem posing, motivation and intuition.

Problemi ed esercizi

Consideriamo la congettura:
Ogni numero pari maggiore di 2 è la somma di due numeri primi.

Proviamo a verificare con alcuni esempi, 14, 26, 80:
14 è 11+3 26 è 13+13 80 è 7+73.
Per quante verifiche si facciano con numeri grandi e piccoli, pari, con un po' di pazienza, si trova una coppia di addendi primi che realizzano la condizione detta.
Siamo di fronte ad un problema?
Non si risponda banalmente: «Non è un problema perché non c'è una domanda!». Non c'è una domanda *esplicita*, ma si tratta di un problema, eccome!
Si tratta di *dimostrare* quella affermazione (ed allora la "congettura" diventa un teorema, cioè un'affermazione vera perché dimostrata);
oppure si tratta di trovare un esempio che la contraddica (cioè, "esibire" un numero *n* pari maggiore di 2, e *dimostrare* che non esistono due numeri primi la cui somma è *n*).
In un caso o nell'altro, si è *risolto* il problema.

Ancora una congettura:
Siamo una classe di 18 allievi e vogliamo andare in gita noleggiando un pullmino che costa 40 euro; 2 di noi, però, non possono pagare. Se i restanti 16 versano 3 euro a testa, ce la possiamo fare.
Anche qui la domanda è implicita: è vero o non è vero che *ce la possiamo fare?*
Stavolta è facile: basta fare una moltiplicazione e verificare. Si tratta di un problema? Non c'è una domanda esplicita, ma c'è una situazione che porta ad una questione che va risolta. Potremmo chiamarla: *situazione problematica*.

Ancora un esempio:
Pierino va al mercato con 2 euro e compera delle uova a 0,20 euro l'una, spendendo tutto; lungo il viaggio di ritorno, però, ne rompe 3. Quante uova porta a casa?

Ecco! Ora tutti gli ingredienti sono al posto giusto per avere quel che a scuola si chiama *problema*: dati numerici, situazione fittizia ma comprensibile ed immaginabile, un quasi - suggerimento semantico delle operazioni necessarie… Un vero e proprio *problema scolastico*!

È opportuno, ora, indicare una ripartizione banale ma utile, ormai molto diffusa in tutto il mondo, fra *esercizi* e *problemi.*
Entrambi concernono situazioni problematiche causate da vari fattori: una proposta dell'insegnante (più o meno motivata), test o quiz, effettiva e reale situazione nella quale l'alunno o la classe si ritrova, … Ma:
gli *esercizi* possono essere risolti utilizzando regole o nozioni già apprese ed in via di consolidamento e quindi rientrano nelle categorie: rafforzamento o verifica;
i *problemi* coinvolgono o l'uso di più regole o nozioni (alcune anche in via di esplicitazione proprio in quell'occasione), o la successione di operazioni la cui scelta è atto strategico, talvolta creativo, dell'allievo stesso.
Si capisce bene che non si tratta di vere e proprie definizioni: ci sono casi *al limite* tra le due posizioni.
Si tratta, a nostro avviso, di un atteggiamento giocato sui ruoli relazionali insegnante-allievo, più che di un vero e proprio spartiacque, tanto più che una situazione problematica può dare luogo a problema o esercizio a seconda della situazione didattica.
Vediamo un esempio: si dà un oggetto circolare piatto (ad esempio, un disco) e si chiede all'allievo di valutare la lunghezza del contorno. In prima elementare è un problema; in terza media è (dovrebbe essere) un esercizio.

Entrano in gioco anche altri fattori, fra i quali la motivazione (come vedremo in modo più approfondito più avanti) per cui anche la distinzione esercizio / problema può dipendere dall'atteggiamento, da fattori emozionali o emotivi, dal ruolo che ha l'esercitazione in

classe, dal "contratto" che si è implicitamente stabilito… e dalla maggiore o minore vicinanza alla realtà delle situazioni problematiche proposte.
Chiariamo questo punto.
Solitamente gli esercizi di tipo scolastico sono del tutto fittizi. Quel Pierino che va al mercato con 2 euro per comprare delle uova e che poi ne rompe 3, non esiste e, se non per finta, nessun bambino della classe si identifica con lui: la situazione è credibile, ma fittizia, non vissuta. Invece, una spesa per la gita da dividere in 16 può essere *davvero* una situazione problematica vissuta nella realtà, da cogliere al volo per sollecitare analisi matematiche. Si tratta di dire bene i termini della questione, in lingua; farsene un'immagine mentale; far sì che ogni bambino abbia un modello matematico della questione; e poi passare alla soluzione concreta: quanti soldi chiedere ai propri genitori per la gita.
Non occorre che la situazione problematica sia proprio vissuta in prima persona; la cosa è molto più sottile e la motivazione gioca un ruolo non secondario. Facciamo un esempio. In una classe interessata, la costruzione della successione di Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … (legata nella storia e, nella fattispecie, all'aumento della popolazione delle coppie di conigli in un allevamento), è stata introdotta in modo fittizio sì (perché nella realtà nessuno dei bambini aveva dei conigli), ma con tale presa emotiva (lo "sfondo" era stato vissuto con grande vivacità) da divenire problema: ciascuno voleva portare il suo contributo personale che andava ben al di là del semplice computo aritmetico (la legge da scoprire è che, dopo 1, 1, ogni numero è la somma dei due precedenti).
Resta da chiarire, ma non è banale, che cos'è la *situazione problematica* rispetto al *problema*, ed abbiamo, a questo proposito, più di un'interpretazione. Ne scegliamo, per ora, due:
quella di P. Boero e P.L. Ferrari (1988), per cui la situazione problematica è il «significato del testo» (mentre il testo è «un sistema di segni» che la codifica);

quella di R. Borasi (1984), per cui la situazione problematica è «il contesto in cui ha senso il problema posto».
Si può proporre un'alternativa (D'Amore, 1993):
situazione problematica è il sistema delle competenze reali nelle quali si può immaginare quanto descritto da un testo e dal suo significato (semantica), all'interno delle esperienze del singolo bambino (il sistema è specifico per quel dato problema).
Per cui la situazione problematica recupererebbe aspetti semantici, pragmatici ed esperienziali.
Un'altra domanda, ora: che cos'è il problema? Esiste una definizione?
Non possiamo che riportare la celebre frase di uno dei più famosi studiosi di risoluzione dei problemi in matematica, G. Polya (1945):
«Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano».
Ecco invece quel che propone K. Duncker (1935), evidenziando esclusivamente l'obiettivo:
«Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla».
Come si vede non si tratta di definizioni, ma di precisazioni, di puntualizzazioni: non c'è problema se non c'è una situazione problematica che crea una domanda, rispondere alla quale sia per qualche motivo causa di difficoltà.

Risoluzione di problemi, formazione di concetti e teoremi in atto

Il titolo di questo paragrafo richiederebbe da solo più di un libro; inizieremo a trattare qui questa problematica, rinviando poi a testi opportuni.
Risolvere problemi e saper scegliere come comportarsi in situazioni problematiche sembra essere un veicolo eccellente per la formazione di concetti. Ma, in concreto, è assai difficile stabilire che cosa ciò significhi *davvero*.
Un ottimo tentativo di spiegare questo punto è dovuto a G. Vergnaud al quale ci ispireremo per quel che segue.
È ben noto che, per spiegare il modello di sviluppo mentale dei bambini, J. Piaget ricorre a vari schemi, tra i quali ricordiamo lo schema di "permanenza dell'oggetto". Famosi sono i suoi esperimenti; per esempio, spostando in modo evidente da un luogo A ad uno B un oggetto nascosto in entrambi i casi (per esempio, in A sotto un tappeto, in B sotto un asciugamano), per un certo periodo di tempo, il bambino molto piccolo continua a cercare l'oggetto nel punto dal quale è stato spostato. Solo lentamente capisce che c'è una sorta di principio di permanenza: permanenza che riguarderà poi, nel corso del suo sviluppo, per esempio, il valore cardinale del numero, di una quantità, di una lunghezza, di una ampiezza, di una massa,… Accanto alla permanenza dell'oggetto, va considerata un'invarianza di certe relazioni, di tipo più astratto e dunque tale da costruire una conquista più tarda. Per esempio la relazione "essere figlio di" che è ben compresa dal bambino se la coppia ordinata è (io-bambino; il mio papà), ma è a lungo rifiutata se diventa (il mio papà; il mio nonno paterno). Questa permanenza delle relazioni (che si chiama "invariante relazionale") è, per così dire, la base della comprensione di veri e propri "teoremi". Se A è minore di B e B è minore di C, allora A è minore di C. L'affermazione finale (tesi) "A è minore di C" può essere riconosciuta facendo la prova (paragonando, laddove è possibile, A e C), oppure "deducendola" dalle prime due. Noi sappiamo che si tratta della proprietà transitiva della relazione d'ordine "essere minore di": se è verificata nel primo modo

(euristico) non è altro che la presa di contatto con un invariante relazionale; ma se è, per così dire, "dedotta" (o intuita, o percepita), allora si può parlare di un *teorema in atto*.
Un bell'esempio proposto più volte da Vergnaud stesso è quello di un bambino che deve decidere quanti posti apparecchiare per gli invitati a tavola; alcuni invitati sono in casa *(a)*, altri in giardino *(b)*; i posti a tavola devono allora essere $a+b$. Si tratta di un *teorema in atto*: il bambino ha applicato una regola di cardinalità.
È chiaro che la presa di coscienza di tali *teoremi in atto* costituisce genuina formazione di concetti e che la situazione di maggior naturalezza per far emergere *teoremi in atto* è la risoluzione di problemi.
Si tratta dunque, tra le altre cose, di un modo di guardare alla risoluzione dei problemi, attiva e deduttiva.

Problem solving, problem posing

Abbiamo ora necessità di contrapporre tra loro due problematiche apparentemente opposte, quelle del titolo del paragrafo.
Abbiamo già fatto notare come una delle spinte ad apprendere sia la motivazione e, tra queste, la gratificazione (piacere "interno", cioè soddisfazione interiore, o il riconoscimento sociale di essere considerato un buon risolutore di problemi). Dunque, motivazione a parte, l'attività di risoluzione di problemi può a diritto essere considerata come una estensione dell'apprendimento di regole o di modi di comportarsi o di raccolta di esemplificazioni di strategie ecc.
Tale processo, difficile da definire, per la maggior parte si svolge *all'interno* dell'allievo che risolve, per quanto notevoli possano essere le sollecitazioni (facilitazioni, suggerimenti ecc.) che, sotto forma di vari tipi di comunicazioni (verbali o no), arrivano al soggetto che risolve il problema.

Per quanto l'applicazione di regole (norme, esperienze,…) precedenti sia importante, è bene notare che il processo risolutivo genera anche e soprattutto un nuovo *apprendimento*. È vero che, in prima istanza, chi risolve tenta di applicare regole (norme, esperienze,…) o procedimenti (meglio se vincenti) precedentemente esperiti con successo; ma è anche vero che, se la situazione problematica è opportuna, il soggetto potrebbe non trovare una situazione *analoga* o *identica* ad una precedente. Egli può invece trovare una particolare combinazione di regole (norme, esperienze,…) del tutto nuova e che andrà ad arricchire il campo delle esperienze cui far ricorso in futuro.
Insomma: *risolvendo il problema*, *il soggetto ha appreso*.
In questo senso non ha molta importanza a quale modello di riferimento ci stiamo relazionando; la questione è assai generale e può funzionare per tutti i casi.
Possiamo chiamare per ora "strategia di risoluzione del problema" questa serie di passaggi:

- esplorazione delle regole (norme, esperienze,…) già note e già applicate;
- scarto di ciascuna;
- analisi della situazione da più punti di vista;
- confezionamento di una regola comportamentale nuova, ottenuta "dosando" in modo opportuno regole (norme, esperienze,…) vincenti già utilizzate in precedenza;
- verifica della risolubilità del problema con tale regola nuova.

Ecco perché R. M. Gagné (1965-1985) sottolinea l'esigenza che «l'espressione problem solving è usata generalmente per riferirsi a *problemi nuovi*» (noi diremmo: non esercizi). Tra questi, egli esemplifica con i seguenti: parcheggiare l'auto in un luogo lecito e vicino al posto di lavoro; capire il perché delle fasi lunari; descrivere un comportamento indolente solo attraverso le azioni di un personaggio;…

Il fatto che la risoluzione provochi pensiero, lo fa parlare di *problem solving produttivo* (proprio perché si produce un effetto).

Di altra natura, ma sempre all'interno della stessa problematica, è l'attività del *problem posing*. Questa attività comporta due modi distinti ma tra loro intrecciati di agire:

- la creazione di un problema basato sulla riflessione intorno ad un argomento in esame
- la proposta di domande che analizzano situazioni "limitrofe" ad un problema in esame.

Gli autori del testo che ha reso celebre il problem posing, S. I. Brown e M. I. Walter (1988), distinguono due modi diversi di dire che rendono molto bene la questione:

- fare o farsi domande
- chiedersi sempre «E se …?», oppure «E se non …?».

Una banale riduzione didattica del *problem posing* è l'attività del fare inventare agli allievi i problemi. Ma il *problem posing*, nella sua formulazione più reale e genuina, deve portare a nuovi problemi, semmai originati da quelli precedenti (o da quello in esame). Questo tipo di attività non può che generare scoperta, in un senso che, a nostro avviso, assomiglia molto a quello sottolineato dagli studiosi di *problem solving*.
Ora un esempio:
Dati due triangoli equilateri, trovarne un terzo, la cui area sia uguale alla somma delle aree dei primii due (Brown, Walter, 1988, p. 157).
Nello spirito del *problem posing*, si compie un'analisi preliminare ad ogni tentativo di risolvere il problema posto. Ogni allievo ha una sua reazione personale. Si può notare che mancano i dati e quindi ci si può chiedere quale sia la natura della richiesta; quali proprietà dei triangoli entrano in gioco? Ci si aspetta una soluzione geometrica (un disegno), o dei numeri? È chiaro che il risolutore può, in base al suo «stile», scegliere la strategia che gli è più cònsona.

Per esempio, un allievo può decidere che studierà un caso particolare con due triangoli dati, uno di lato 3 e l'altro di lato 7. Così procede, facendo il disegno o ritagliando opportunamente cartoncini (il calcolo suggerito dagli Autori non è certo adatto a bambini di scuola primaria, ma lo spirito che vogliamo far emergere è indipendente da questi fatti contingenti). Ma, anche trovata una soluzione (approssimata), che cosa succede se si cambiano i dati inventati, 3 e 7?
Quel che ci preme evidenziare è che il *problem posing* è un modo di porsi all'interno del *problem solving* e che quindi le due problematiche non sono opposte, ma assai vicine. Impostare un problema è solo un modo di comprenderlo meglio, di analizzarlo meglio; porsi domande che sembrano… dribblare la richiesta, può voler dire entrare in maggior confidenza con il problema. Se poi il problema è risolto, il *problem posing* ha un effetto *a posteriori* perché non si cessa di porsi domande sul problema e sulla soluzione fornita: si poteva far altrimenti; si poteva usare quell'altro dato; ci sarà un modo generale per risolvere la questione; c'è qualcuno che ha inventato questo metodo; quando e perché questo problema è stato posto;… In situazione simmetrica, si pone l'effetto *a priori* che è, sostanzialmente, l'analisi di tutti i dettagli del problema, prima di procedere alla sua soluzione.
In definitiva: il *problem posing* si situa all'interno della vasta problematica del *problem solving* e non si limita ad essere banalmente interpretato come "far inventare i problemi ai bambini", attività peraltro ricca di significato se condotta in modo motivato ed oculato.
Negli esempi che gli Autori forniscono, rientra a nostro avviso molto bene quello celeberrimo che si racconta a proposito di Gauss bambino: calcolare la somma dei cento numeri da 1 a 100. È ben noto che il procedimento usato da Gauss è il seguente: 1+100=101, 2+99=101, 3+98=101, e così via fino a 50+51=101; dunque 50 volte 101. È un bell'esempio di *problem solving* che però, in base a quanto abbiamo detto, utilizza un modo di intendere il *problem*

posing; invece di fare quel che il problema dice (che sarebbe *1*+*2*=3, 3+*3*=6, 6+*4*=10, 10+*5*=15, e così via fino a 100, facendo *99* addizioni) analizziamo il problema con dei «E se …»: «E se invece di addizionare in ordine, io addiziono il primo e l'ultimo, che cosa trovo?».

Dunque: scoperta di regolarità.

Addizionando in scala crescente-decrescente, si ha una regolarità: abbiamo scoperto una regola («un trucco» dicono i bambini). Ma per parlare di regola o di scoperta, e darle dignità nel mondo della matematica, occorre che essa sia generale: vale per sempre? E se invece di 100 fosse 167? E se invece di 1 si partisse da 34? E se invece di un numero pari avessimo un numero dispari di addendi? E così via.

Alla base delle sollecitazioni poste c'è un atteggiamento analitico (chiamiamolo fantasia e curiosità attive) che necessariamente porta a far sì che la soluzione sia una scoperta.

«Il problem solving, come metodo di apprendimento, richiede che il soggetto *scopra* la regola di ordine superiore senza un aiuto specifico. Presumibilmente egli così costruisce una nuova regola in un suo modo particolare e può anche non essere in grado di verbalizzarla dopo averlo fatto» (Gagné, 1965, p. 268).

L'Autore cita esperimenti in base ai quali afferma che il metodo della scoperta (descritto in precedenza) porta ad un più ampio *transfer* delle regole acquisite.

(È importante segnalare come talvolta la pratica didattica abbia svilito nella prassi l'idea della didattica della scoperta).

Dunque il *problem posing* può essere visto come elemento determinante del processo di *problem solving* ed avvio alla scoperta.

Ci sembra però onesto e doveroso avvertire che il *problem solving* può non avere *sempre* successo… Per esempio, se le regole da trovare sono di una complessità superiore a quella cui il soggetto può arrivare, non si potrà che avere una soluzione parziale (e solo in casi particolari).

Il ruolo fondamentale della motivazione

«Potrebbe fare di più, ma è distratto, è svogliato». «Non si interessa». «È demotivato». Quante volte, nella nostra vita di docenti, educatori, genitori, abbiamo sentito dire queste frasi e, chissà, forse qualcuno di noi le ha anche dette.
Il fatto è che a nessun allievo viene proposta un'alternativa: ogni allievo *deve* frequentare la scuola, ma non è possibile che *ogni* studente si interessi a *tutto*, *sempre* e *comunque*. Nel rapporto fondamentale che regge l'istituzione-scuola, cioè quello insegnante / allievo, c'è una forte asimmetria: l'insegnante è a scuola per scelta personale, educare è il suo mestiere, ha un certo potere decisionale: l'allievo è a scuola per obbligo, anche quando non ne ha voglia (ed è ragionevole pensare che su 200 giorni di scuola ce ne sia più d'uno nel quale egli avrebbe preferito fare altro). «È demotivato» suona come un'accusa, una colpa; ma di chi? D'altra parte, qual è il meccanismo che fa nascere una "motivazione ad apprendere"? E che cos'è questa *motivazione*?
Cercheremo di delineare una risposta generale, e non solo relativa al mondo della scuola, per avere a disposizione più elementi, presentando una selezione di motivazioni operative:
1. Motivazione che si riferisce alle variabili che rendono efficace una certa conseguenza di un comportamento indotto.
2. Motivazione basata su un comportamento.
3. Motivazione basata sulle conseguenze.
4. Motivazione basata sugli stimoli discriminativi. Stimoli distinti possono creare la stessa motivazione ed anzi rinforzarla rinviandosi l'un l'altro. È qui che si gioca gran parte della motivazione "interna", non banale come nei casi precedenti. Stimoli distinti possono discriminare, coscientemente o meno, le diverse componenti in azione; e possono essere introdotti coscientemente o no dall'attore (nel nostro caso l'allievo) o dall'insegnante.

Questa rapida analisi, a nostro avviso, da sola non permette di studiare il fenomeno scolastico che qui ci interessa; ci sembra invece che in Gagné (1965 – 1985) si entri più nello specifico.
Accettiamo subito che il problema di controllare, conoscere, rinforzare, sviluppare, utilizzare la motivazione è «la più seria esigenza che la scuola si trovi di fronte». Il problema è dunque enorme: psicologico, pedagogico, didattico, quanto meno.
"Avere motivazione" invade (e di gran lunga) la sfera affettiva: un'azione educativa che tenga conto di ciò abbraccia problematiche enormi che qui non pensiamo neppure per un momento di affrontare. Ci limiteremo a due aspetti della questione:

- motivazioni alla frequenza scolastica;
- motivazioni ad apprendere.

Trascureremo uno studio approfondito delle prime; ma esso non sarebbe, a rigore, del tutto banale. Lo studente, dicevamo sopra, è obbligato ad andare a scuola; se non c'è motivazione, questo obbligo può avere conseguenze negative su atteggiamento, attenzione, disponibilità,…
Non volendo entrare nei dettagli, ci limiteremo a tratteggiare un atteggiamento di molti studiosi in psicologia del comportamento scolastico che faremo nostro: daremo per scontata la presenza a scuola, motivata in modo positivo. Diremo solo che se la famiglia dell'alunno apprezza la scuola e la sostiene, gran parte dei problemi sono risolti; così, se la comunità in cui l'allievo vive accetta la scuola, è plausibile pensare ad una motivazione positiva alla frequenza. Ma non è così raro il caso contrario: la scuola obbligatoria per nomadi, per ragazzini immigrati senza riconoscimento di titolo precedente (che si vedono costretti alla primaria), per bambini abituati a stare nella strada senza controllo e cure (si pensi alle *favelas* brasiliane), non sono una assoluta minoranza ma costituiscono (anche in Italia) un caso di cui percentualmente occorre tenere conto oggi sempre di più.
Veniamo dunque alla motivazione ad apprendere.

Prima di tutto: è una motivazione specifica per alcuni temi particolari dell'apprendimento o è, per così dire, generalizzata? Nel primo caso, è più efficace l'apprendimento?
Contrariamente a quel che si potrebbe pensare, non c'è molta differenza di risultati tra i due tipi di apprendimento. Ciò spinge a non considerare la motivazione ad apprendere qualche cosa di specifico, ma come parte stessa della motivazione generale; d'altra parte, fa parte del contratto didattico una sorta di fiducia che il bambino ha nel proprio insegnante: «Mi affido a te, tu sai che cosa devo imparare e perché, sono nelle tue mani».
Messe le cose in questi termini, le spinte che motivano un allievo ad apprendere sembrano essere:

- desiderio di avere l'approvazione degli altri (compagni, insegnanti, genitori, società in genere);
- evitare la disapprovazione degli altri (è una conseguenza e un rafforzamento del desiderio di cui sopra);
- conquistare una posizione di stima tra gli alleivi della classe (stima sociale);
- desiderio più o meno inconsapevole di padroneggiare le abilità intellettuali che lo stimolano.

È ovvio che queste spinte sono fortemente interrelate tra loro e che possono essere aumentate con opportuni stimoli. Rinforzi e stimoli sono:

- espressione dell'approvazione in modo esplicito;
- mancanza di disapprovazione;
- dimostrazioni di stima sociale;
- facilità di padroneggiare abilità;

ma il rinforzo passa attraverso un'oculata scelta di compiti da sottoporre all'allievo, proprio per dargli la possibilità di mostrare la padronanza che dicevamo e di aver giustamente meritato approvazioni e stima. Inoltre, come pratica consolidata scolastica, più o meno velata, più o meno esplicita, c'è una dichiarazione di *profitto positivo* da parte dell'insegnante. Ed è ben noto che, anche

in tempi di giudizi e non di voti, la società e la famiglia tendono a caricare molte espressioni motivanti su questo punto.
Certo la forma migliore di motivazione è l'autosoddisfazione nella consapevolezza di aver raggiunto traguardi positivi e di conseguenza il desiderio di migliorarli; se questo livello si raggiungesse, avremmo sostanzialmente degli autodidatti! Ma siamo ben lungi dal raggiungere, nella norma e nella pratica scolastica quotidiana, questo tipo di motivazione.
J. G. Nicholls (1983) distingue tre tipi di atteggiamenti che coinvolgono una teoria della motivazione:

- coinvolgimento estrinseco: imparo per ottenere qualche cosa (consenso sociale, finire la scuola, ricevere premi o ricompense,…);
- coinvolgimento interiore: voglio mostrare che sono bravo o intelligente;
- coinvolgimento sul compito: sono soddisfatto dei miei miglioramenti e della facilità con la quale riesco nei compiti che mi vengono affidati.

Come può l'insegnante migliorare la motivazione?
Esperienze in questo campo sono state fatte:

- aumentando la ricompensa in caso di atteggiamento positivo;
- con sollecitazioni "in corso d'opera", senza aspettare che il lavoro dello studente sia finito;
- rendendo lo studente consapevole da solo dei propri successi;
- cercando una scala di compensi premianti.

Motivazione e volizione

Abbiamo sempre parlato di motivazione, ma la tendenza attuale è di non vedere la motivazione come fatto isolato, ma puntare sulla coppia motivazione / volizione.
Se la motivazione è indotta dall'insegnante sull'allievo, questi, però, deve in qualche modo rispondere, per esempio *volendo*

eseguire il compito, impegnandosi nell'azione di costruzione di conoscenza e competenza.
Mentre la motivazione è vista come un processo che passa dall'insegnante all'allievo, la volizione è vista più come un processo di convinzioni "interne", in base al quale lo studente, motivato al compito, *decide* di impegnarvisi.
In tutta la didattica della matematica attuale, si ha la spinta a considerare come fondamentale, nell'epistemologia dell'apprendimento, la "implicazione" dell'allievo, cioè la sua assunzione di responsabilità nella costruzione di conoscenza / competenza; se questa assunzione non 'c'è, difficilmente ci sarà costruzione.
Su tutto ciò, si veda D'Amore (1999).

La capacità di risolvere problemi con un colpo d'intuizione

Non è un fenomeno isolato o riservato ad alcuni "casi", il fatto che un bambino sappia rispondere, soprattutto oralmente, alla domanda di un problema, ma che, alla richiesta dell'insegnante di "spiegare" qual è il procedimento che ha seguito, non sappia dirlo. Talvolta il bambino ne è consapevole, tanto che non è raro che esclami: «Il risultato è questo:… Ma non so come ho fatto a trovarlo». Se poi si forza il bambino a fornire una spiegazione del procedimento seguito, creando una situazione che lo spinga in modo piacevole a farlo comunque, si hanno i risultati a prima vista sorprendenti, come quelli raccolti in alcune ricerche sull'aritmetica del tempo convenzionale nella scuola elementare (D'Amore, Sandri, 1993).
Ecco due esempi di protocolli significativi per motivi diversi; si lavorava sul seguente testo:

Angela deve andare da Bologna a Rimini (120 km) passando per Faenza (60 km) in corriera; parte alle 8 e viaggia a 60 km all'ora. A che ora passa per Faenza?

Nel momento in cui Angela passa per Faenza, Giuliano parte da Bologna per andare a Rimini, facendo la stessa strada di Angela, ma in automobile, alla velocità di 120 km all'ora. Chi arriva prima a Rimini, Angela o Giuliano?

Simona, di V, risponde «9» alla prima domanda e «Giuliano» alla seconda. Alla richiesta di spiegare il ragionamento, scrive:
«Angela passa per Faenza alle 9
120+60=180
180:60=3
Giuliano (poi cancellato)
180:120=1 r. 6
Se Angela viaggia a 60 km all'ora e i km da Bologna a Faenza sono 60, ella ci metterà un'ora».

Roberto, di IV, risponde «9» alla prima domanda e «Arrivano insieme» alla seconda. Alla richiesta di spiegare il ragionamento, scrive:
«Per Faenza passa alle ore 9.
Arrivano a Rimini insieme.
Nella prima risposta ho usato (poi cancellato) fatto 60:6 e mi è venuto 10 e nella seconda risposta 120:6 e mi è venuto 20».

Di fronte a questi protocolli bisogna ammettere che vi sono bambini che sanno dare risposte a problemi, anche complessi, ma che non sanno affatto giustificare la risposta (corretta o no che sia). Certamente, in gran parte ciò dipende dalla difficoltà di gestione argomentativi della lingua, ma in molti casi la "spiegazione" orale o scritta non è che un tentativo di riempire un vuoto. C'è anche da dire che, alla forzata consegna di scrivere la risoluzione formale, concorrono varie clausole del contratto didattico.
Lungi dall'essere una magìa, o qualche cosa di lontano dal mondo deduttivo della matematica, il fenomeno sembra rientrare anche nella pratica matematica più creativa, almeno stando a quanto

asserisce addirittura Jules Henri Poincaré (1906) il quale contesta la tesi che la creazione della matematica avvenga in modo rigorosamente deduttivo, anzi mostra con più esempi che non è così.
Dunque, nella pratica creativa matematica, costruttiva, l'atto d'intuizione è preponderante. Se un giocatore di scacchi dovesse prevedere fino alla successiva quinta mossa, dovrebbe esaminare ed analizzare migliaia e migliaia di sviluppi possibili della partita in atto, e quindi si limita ad un atto di intuizione (guidato dalla competenza e dall'esperienza) nella scelta della propria mossa; così, anche il matematico non analizza dal punto di vista deduttivo, ma compie analoghi passi dettati dall'intuizione.
Perché la stessa posizione non potrebbe essere sostenuta a proposito della risoluzione di un problema? A conferma di questa possibilità esistono *quei bambini* di cui si diceva sopra.

Una conclusione… circolare

Torniamo all'inizio di questo testo.
Consideriamo la congettura:
Ogni numero pari maggiore di 2 è la somma di due numeri primi.
Il Lettore la ricordava ancora? La proposta di problema, dunque, è:

Dimostrare la congettura:
Ogni numero pari maggiore di 2 è la somma di due numeri primi.

Si tratta di un testo semplice, che richiede "solo" l'addizione, "solo" sapere che cosa vuol dire "numero primo", che avviene nel mondo dei numeri naturali, quelli che i bambini manipolano con facilità fin dai primi giorni di scuola…
Dunque: un problema *facile*?

- Sì, certo, è un problema facile *da capire*; tant'è vero che siamo riusciti a studiarlo con i bambini fin dalla metà della scuola primaria; i bambini, naturalmente, si limitavano a fare alcuni esempi, sulla base dei quali credevano di poter indurre che la congettura è vera. Lo abbiamo anche sfruttato in corsi con insegnanti, con risultati molto interessanti.

- No, nient'affatto, tant'è vero che il matematico tedesco, che visse però in Russia, Christian Goldbach (1690-1764), lo lanciò al grande Leonhard Euler addirittura nel 1742; come tutti sanno benissimo, tale problema ancora oggi aspetta una risposta, nonostante ci abbiano provato tutti i grandi della matematica da 260 anni (!) e nonostante ci sia un formidabile premio in danaro destinato a chi lo risolverà.

Questo fatto deve farci riflettere:
non c'è coincidenza tra *facile da capire* e *facile da risolvere*.
Dunque, non è il testo che fa il problema: il problema è un complesso vasto ed articolato, ricco di insidie…

Su suggerisce, come lettura di approfondimento:
D'Amore B. con la coll. Di Marazzani I. (2003). *Problemi di matematica nella scuola primaria. Bologna: Pitagora.*

Bibliografia

Boero P., Ferrari P.L. (1988). Rassegna di alcune ricerche sul «problema dei problemi»: loro importanza per l'insegnamento. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 7/8, 11, 659-684.

Borasi R. (1984). Che cos'è un problema? Considerazioni sul concetto di problema e sulle sue implicazioni in didattica della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 2, 7, 83-98.

Brown S.I., Walter M.I. (1988). *L'arte del problem posing.* Torino: Sei.

D'Amore B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving.* Milano: Angeli.

D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Sandri P. (1993). Il problema nella pratica matematica ed educativa. *L'educatore*. I-X.

Duncker K. (1935). *Psicologie des produktiven Denkens.* Berlin: Springer. [Trad it.: *La psicologia del pensiero produttivo.* Firenze, Giunti-Barbera, 1969].

Gagné R.M. (1965-1985). *The conditions of learning.* New York: Holt, Rinehart & Winston Inc. (1965). [Trad. it.: Roma: Armando, III ed. 1987]. [Il libro è completamente cambiato nella sua impostazione, quando esce in una nuova edizione per i tipi di Cbs College Publishing, 1985].

Nicholls J. G. (1983). Conceptions of ability and achievement motivations: A theory and its implication for education. In: Parisl

Poincaré H. (1906). *La science et l'hypothèse.* Paris: Flammarion.

Polya G. (1945). *How solve it.* [Trad. it.: Milano, Feltrinelli, 1967].